Egy geometriai föladat.

Föladatunk következő:

„Határoztassék meg a (realis) kúpszelet n pontja P_1, P_2, P_3, ..., Pn) úgy, hogy a kúpszelethez P_1 pontban simuló kör P_2 ponton, a P_2 pontban simuló kör P_3 ponton, és igy tovább ...., végre a Pn pontban simuló kör P_1 ponton menjen keresztül."

Természetesen n lényegesen pozitiv egész szám. Ismeretes, hogy a kúpszelet tetszőleges P_1 pontjában húzott érintője akkora szöget alkot például a nagy tengelylyel, mint ez a P_1 P_2 húrral· Ebből következik, hogy nem kell részletesebben foglalkoznunk azokkal az esetekkel, melyekben kúpszeletünk hyperbola vagy parabóla. Ugyanis, ha P_1 nem esik csúcsba, akkor P_2, P_3, ... tőle sorban mind távolodnak hyperbolánál és parabolánál, s igy a Pn ben simuló kör nem mehet P_1-en át. Ha azonban P_1 csúcs, akkor P_1, P_3, P_3, ... Pn egybe esnek.

Kizárhatjuk továbbá azt az esetet is mikor a kúpszelet kör. Tehát föladatunk szempontjából csak az ellipsis marad hátra.

Vegyük az ellipsis következő előállitását:

$$\begin{cases} x = a \cos \omega \\ y = b \sin \omega \end{cases}$$

Tartozzék az ellipsis tetszőleges P_1 pontjához épen ω, mint parameter. Akkor az ellipsíshez P_1 pontban simuló kör oly P_2 pontján megy keresztül, melyhez paramenterül:

$$-3\omega + 2k\pi$$

tartozik, hol k tetszőleges egész szám. *)

Ezen egyszerü tétel ismételt alkalmazásával találjuk, hogy a P_1, P_2, P_3, ... Pi, ... Pn pontok csak úgy felelhetnek meg

* Salmon-Fiedler: Analyt. Geometrie d. Kegelschnitte, 1878. 307. l.

föladatunknak, ha parameterák sorban 2π additive hozzájok járuló tetszőleges egész számu sokszorosaitól eltekintve

$$\omega\ ;\ -3\,\omega\ ;\ (-3)^2\omega\ ;\ \ldots\ ;\ (-3)^{i-1}\,\omega\ :\ \ldots\ldots\ ;\ (-3)^{n-1}\,\omega.$$

ω-t meghatározza az, hogy az ellipsishez Pn pontban simuló kör P_1 ponton tartozik àtmenni. Ez pedig bekövetkezik, szintén az említett tétel alapján, ha

$$(-3)^n\,\omega + 2\,k\,\pi = \omega$$

Ebből, tekintve k tetszőleges előjelét:

$$(1.)\qquad \omega = 2\,\pi\frac{k}{\left|1-(-3)^n\right|}$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots\ldots)$$

Minden k értékhez tartozik egy ω szög s igy egy P_1 pont. Mindenik P_1 ponthoz könnyü meghatározni a hozzá tartozó P_2, P_3, ... Pi, ... Pn pontok parametereit s igy coordinatait. Ha P_1 coordinatái a fölvett rendszerben x_i, y_i, akkor

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned} x_i &= a\cos 2\,\pi\frac{(-3)^{i-1}k}{\left|1-(-3)^n\right|}\\ y_i &= b\sin 2\,\pi\frac{(-3)^{i-1}k}{\left|1-(-3)^n\right|}\end{aligned}\right.$$

$$(i = 1,\ 2,\ldots\ldots n)$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots\ldots)$$

E két egyenlet az összes megoldásokat magában foglalja.

A (2)-ből kiolvasható, hogy k végtelen sok értéke mellett is csak véges számu különböző megoldás van és, hogy az összes különböző megoldásoknak és csakis ezeknek nyeréséhez a k értékek egy oly rendszerét kell kiválasztani, melynek bármely két k' és k'' tagjára nézve

$$(3.)\qquad (-3)^{i-1}k' \equiv\!|\!\equiv (-3)^{j-1}k''\ \left(\text{mod.}\ \left|1-(-3)^n\right|\right)$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ldots\ldots n)$$

Tekintetbe veendő t. i. hogyha két megoldásnak csak egy közös pontja is van, akkor a két megoldás teljesen ugyanaz.

Ha $i = j$, akkor inconguentiánk a modulus változása nélkül egyszerüsíthető s lesz

$$k' \equiv\!|\!\equiv k''\ \left(\text{mod.}\ \left|1-(-3)^n\right|\right)$$

Tehát elég például azon k értékekre szoritkozni, melyekre nézve

(3a.) $$0 \leqq k \leqq \left|1 - (-3)^n\right| - 1$$

és ezen k értékekből választani ki (3) segélyével a kivánt értékrendszert, ami most már csakis véges számmal lehetséges. Ezen értékrendszer tagjainak száma adja az egymástól különböző megoldások számát, amit később meg fogunk határozni.

Tekintve ω geometriai jelentését, az (1) és (2) mutatják, hogy ha az ellipsis középpontjából a sugárral leirt kör kerületét a nagy tengely pozitiv felével való átdöfés pontjától kezdve $\left|1 - (-3)^n\right|$ számu egyenlő részre osztva gondoljuk és ezen osztáspontokból a nagy tengelyre merőleges egyeneseket képzelünk bocsátva: ezeknek az ellipsissel való metszéspontjaik közt lesznek az összes megoldások pontjai és viszont mindenik ilyen metszéspont hozzátartozik bizonyos megoldásokhoz, [vagy csak egy bizonyos megoldáshoz ha csupán a különböző megoldásokat számítjuk.]

Tehát föladatunknál a megoldásokban szereplő különböző pontok száma $\left|1 - (-3)^n\right| = \left|1 - (1-4)^n\right|$, vagyis egy 4-el osztható szám. Ezért, mivel az említett kör-osztást az ellipsis egyik csúcsánál kezdettük, e pontok közt lesznek a többi csúcsok is. De a parameterek fölirt sorozatából következik, hogy mindenik csúcs egy-egy oly megoldás, melynek összes pontjai egybeesnek. [Következik ez az ellipsishez csúcsaiban simuló kör érintkezésének rendszámából is.)

Gondoljuk föladatunkat a vázolt eljárás szerint különböző n-ek mellett $n = n', n'', \ldots\ldots$ megoldva. Az ellípsis csúcsain kivül más közös pontok a különböző n-eknél talált megoldások pontjai közt nyilván csak akkor lesznek, ha az egyes n-ekhez tartozó

$$\left|1 - (-3)^{n'}\right|, \left|1 - (-3)^{n''}\right|, \ldots\ldots\ldots$$

kifejezéseknek a 4-en kivül más közös tényezőjük ís van.

Tegyük föl, hogy ez bekövetkezik $n = n'$ és $n = n''$ esetében, hol pld. $n' < n''$. Mindenik esetben legyen egy-egy megoldás pontjaival symbolizálva:

$$P_1' \,;\, P_2' \,;\, \ldots\ldots \,;\, P_{n'}' .$$
$$P_1'' \,;\, P_2'' \,;\, \ldots\ldots \,;\, P_{n''}'' .$$

Legyen ez két oly megoldás, melyeknek van közös pontjuk.

De akkor a két megoldás bármely.kének pontjai egyuttal a másikéi is. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, egyszerüség kedvéért, hogy épen $P_1' \equiv P_1''$ [két pont egybeesését $\equiv$ jelőlje, ez most különösen jellemző, (3)]. Ekkor azután

$$P_1' \equiv P_1'' \equiv P_{n'+1}'' \equiv \ldots\ldots$$
$$P_2' \equiv P_2'' \equiv P_{n'+2}'' \equiv \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_{n'}' \equiv P_{n'}'' \equiv P_{2n'}'' \equiv \ldots\ldots \equiv P_{n''}''$$

Tehát a második megoldás csak a fölirt módon való periodikus ismétlése az elsőnek. [Algebrai tárgyalásnál ez közös meg többszörös gyököknek felel meg.] És ílyenkor a fölirt séma szerint szükségképen $n'' = qn'$, hol $q > 1$ pozitiv egész szám. Az oszlopok száma sémánkban $q + 1$.

És fordítva, ha $n'' = qn'$, akkor és csakis akkor az n'-nél talált mindenik megoldás az egyuttal n''-nél is, csak minden pontja q-szor számitandó az előbbi periodikus sorrendben. Ilyenkor és csakis ilyenkor van tehát $| 1-(-3)^{n'} |$ — és $| 1-(-3)^{n''} |$ -nek a 4-en kivül más közös tényezője is,

Indokolt ezekután az ilyen megoldást n''-re nézve trivialisnak nevezni, ellentétben a valódival, melynek pontjai mind különbözők. Nincs kizárva természetesen, hogy némelyik az n'-nél talált és n''-nél trivialis megoldások közül már n'-re nézve is trivialis.

$n = 1$ mellett az ellipsis négy csúcs adódik egy-egy megoldás gyanánt (2). Ezek itt még valódi megoldások. Ha azonban $n > 1$, e négy, mint láttuk akkor is mindig föllépő megoldás már trivialis. Ha $n > 1$ törzsszám akkor csakis ezek a trivialis megoldások.

A megoldások ezen distinctioja önként rávezet számuk meghatározására. Ez igy történhetík:

Válasszuk ki az 1, 2, ..., n-1 számok közül az n osztóit. Ezeket általánosan jelölje $n_0 = 1, \ldots\ldots$ Tehát bármelyik n_0 mellett talált megoldások azok, és pedig trivialisok n-nél is. Jelölje V_{n_0} egy tetszőleges n_0 mellett föllépő valódi megoldások számát. Akkor azon pontok száma, melyek az $|1-(-3)^n|$ számú, n-nél számba jövő pontok közül [valamelyik n_0 miatt] n-re nézve trivialis megoldásokhoz tartoznak:

$$\Sigma n_0 v_{n_0}$$

hol a summázás valamennyi n_0-ra végzendő. Ha e pontokat a számba jövő pontok közül kirekesztjük: a megmaradtak n-re nézve mind valódi megoldásokhoz tartoznak. És mivel m i n d e n i k tartozik e g y e t l e n v a l ó d i megoldáshoz, azért ezek száma recursive

(4.) $$v_n = \frac{\left|1-(-3)^n\right| - \Sigma n_0 v_{n_0}}{n}$$

A trivialis megoldások száma pedig egyszerüen

(5.) $$t_n = \Sigma v_{n_0}$$

Tehát az összes megoldások száma:

(6.) $$v_n + t_n = \frac{\left|1-(-3)^n\right| + \Sigma (n-n_0) v_{n_0}}{n}$$

v_{n_0}-ra alkalmazva képletünket s igy tovább, lépésről-lépésre haladva, képleteink önmaguk alapján annyiban elveszítik recursiv jellegöket, hogy v_{n_0} helyett megfelelő, többszörös összegelést kivánó módon $v_1 = 4$ kerül $\left|1-(-3)^{n_0}\right|$ -féle kifejezésekkel együtt.

Ha $n = p > 1$ törzsszám, akkor az egyetlen $n_0 = 1$ és $t_n = v_1 = 5$ A (4), (5), (6) ennek megfelelően igy alakulnak:

(4a.) $$v_p = \frac{\left|1-(-3)^p\right| 4}{p}$$

(5a.) $$t_p = 4$$

(6a.) $$v_p + t_p = \frac{\left|1-(-3)^p\right| + 4(p-1)}{p}$$

Az ellipsis symmetriájából, vagy akár a (2)-ből következik, hogy az egyes megoldásoknak a tengelyekre vonatkozó első és második tükörképei [mely utóbbiak egybeesnek s a tükrözött megoldás diametralisát alkotják], hasonlókép megoldások és pedig a tükrözöttel együttesen valódiak vagy trivialisok.

* *
*

Az előbbiek elég alapot adnak tetszőleges, megadott n esetére vonatkozó részletesebb vizsgálatok megkezdésére.

Az egyszerübb esetek közül első, mely külön tárgyalásra méltónak látszik az, mikor $n = 3$.

Az ekkor adodó valódi megoldások geometriai szerkesztése, mint az (1)-ből látszik, a kör kerületének 7 egyenlő részre való osztásával egyenlő rangu föladat. Tehát még akkor sem vihető véghez, ha egy másodrendü görbe, az ellipsisünk, teljesen meg van rajzolva.

A valódi megoldások száma (4a) szerint 8. Ezek bármelyikének a három pontja legyen P_1, P_2, P_3. E pontokban a simuló körök sugarai legyenek sorban G_1, G_2, G_3. A $P_1P_2P_3$ háromszög köré irt kör sugarát mérje r.

Egyszerü számítással igazolható, hogy a $P_1P_2P_3$ háromszög területe:

$$2a.b \sin\frac{\pi}{7} \sin\frac{2\pi}{7} \sin\frac{3\pi}{7}$$

és, hogy

$$r^3 = G_1\, G_2\, G_3$$

Vagyis:

„Egyenlő területü ellipsiseknél az egyes valódi megoldások 3 – 3 pontja által alkotott háromszögek területei egymással egyenlők. E háromszögek köré irt körök sugarai geometriai középarányok az illető szögpontokban az ellipsishez simuló körök sugarai között."

Tételünk második fele a trivialis megoldásoknál trivialis, ha egy-egy ily megoldás 3 pontját egymáshoz végtelen közel levőknek gondoljuk. Ekkor ugyanis

$$r = G_1 = G_2 = G_3$$

P. Dávid Lajos.
